

Ora de matematică

Clasa a XI-a

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

| | |
|---|----|
| Capitolul 1. PERMUTĂRI | 3 |
| 1.1. Permutări | 3 |
| 1.2. Inversiunile unei permutări | 8 |
| Capitolul 2. MATRICE | 13 |
| 2.1. Mulțimi de matrice | 13 |
| 2.2. Adunarea matricelor | 17 |
| 2.3. Înmulțirea matricelor cu scalari | 21 |
| 2.4. Produsul a două matrice | 25 |
| 2.5. Ridicarea la putere a matricelor | 31 |
| Capitolul 3. DETERMINANȚI | 37 |
| 3.1. Determinanți de ordinul 2 | 37 |
| 3.2. Determinanți de ordinul 3 | 42 |
| 3.3. Determinanți de ordinul n | 47 |
| Capitolul 4. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE | 56 |
| 4.1. Matrice inversabile | 56 |
| 4.2. Ecuatii matriceale | 60 |
| 4.3. Rangul unei matrice | 64 |
| 4.4. Sisteme de ecuații liniare. Regula lui Cramer | 68 |
| 4.5. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin metoda lui Gauss | 72 |
| 4.6. Teorema lui Rouché. Teorema Kronecker–Capelli | 76 |
| TESTE DE EVALUARE | 82 |

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

| | |
|--|-----|
| Capitolul 5. LIMITE DE FUNCȚII | 91 |
| 5.1. Mulțimea numerelor reale | 91 |
| 5.2. Reprezentarea geometrică a numerelor reale | 95 |
| 5.3. Mulțimea \mathbb{Q} . Mulțimea \mathbb{R} . Mulțimi mărginite de numere reale | 100 |
| 5.4. Funcții reale de variabilă reală | 104 |
| 5.5. Operații algebrice cu funcții reale. Funcția polinomială. Funcția rațională | 109 |
| 5.6. Clase de funcții reale. Funcții pare. Funcții impare. Funcții periodice. Funcții monotone. Funcții mărginite | 113 |
| 5.7. Funcția putere cu exponent întreg | 118 |
| 5.8. Funcția radical. Funcția putere cu exponent rațional. Funcția putere | 122 |
| 5.9. Funcția exponențială. Funcția logaritmică | 127 |
| 5.10. Funcțiile trigonometrice | 131 |
| TEST DE AUTOEVALUARE | 137 |
| TEST DE EVALUARE | 138 |
| 5.11. Șiruri de numere reale | 139 |

| | |
|---|-----|
| 5.12. Limita unui șir | 145 |
| 5.13. Șiruri convergente | 149 |
| 5.14. Operații cu șiruri convergente | 152 |
| 5.15. Șiruri monotone. Șiruri convergente | 156 |
| TEST DE AUTOEVALUARE..... | 160 |
| TEST DE EVALUARE..... | 161 |
| 5.16. Limita unei funcții într-un punct | 162 |
| 5.17. Limite laterale | 168 |
| 5.18. Calculul limitelor funcțiilor elementare | 171 |
| 5.19. Calculul limitelor funcțiilor studiate. Limitele funcțiilor compuse | 180 |
| 5.20. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții. Cazul $\frac{0}{0}$ | 184 |
| 5.21. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$ | 187 |
| 5.22. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții. Cazul $\infty - \infty$ | 191 |
| 5.23. Cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții. Cazurile $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ | 193 |
| 5.24. Asimptote la graficul unei funcții reale | 197 |
| TEST DE AUTOEVALUARE..... | 201 |
| TEST DE EVALUARE..... | 202 |
| Capitolul 6. CONTINUITATE..... | 203 |
| 6.1. Funcții continue..... | 203 |
| 6.2. Funcții continue pe un interval. Proprietatea lui Darboux a funcțiilor continue | 209 |
| 6.3. Studiul existenței soluțiilor unor ecuații în \mathbb{R} | 212 |
| 6.4. Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale | 215 |
| TEST DE AUTOEVALUARE..... | 217 |
| TEST DE EVALUARE..... | 218 |
| Capitolul 7. CAPITOLUL DERIVABILITATE | 219 |
| 7.1. Derivata unei funcții într-un punct | 219 |
| 7.2. Derivate laterale. Interpretare grafică..... | 226 |
| 7.3. Reguli de derivare. Derivatele funcțiilor elementare | 235 |
| 7.4. Derivarea funcțiilor compuse | 241 |
| 7.5. Derivarea inversei unei funcții | 246 |
| 7.6. Derivate de ordin superior. Rădăcini multiple ale ecuațiilor polinomiale..... | 249 |
| 7.7. Teorema lui Fermat | 253 |
| 7.8. Teorema lui Rolle..... | 257 |
| 7.9. Șirul lui Rolle | 263 |
| 7.10. Teorema lui Lagrange | 266 |
| 7.11. Regulile lui l'Hospital | 272 |
| 7.12. Rolul primei derivate în studiul funcțiilor | 278 |

| | |
|--|------------|
| 7.13. Puncte de extrem | 283 |
| 7.14. Demonstrarea unor inegalități cu ajutorul derivatelor..... | 288 |
| 7.15. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor..... | 290 |
| TESTE DE EVALUARE | 295 |
| Capitolul 8. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR..... | 299 |
| 8.1. Reprezentarea grafică a funcțiilor..... | 299 |
| 8.2. Rezolvarea grafică a ecuațiilor | 313 |
| 8.3. Conice..... | 317 |
| 8.4. Reprezentarea grafică a conicelor..... | 321 |
| TESTE DE EVALUARE | 326 |
| PROBLEME RECAPITULATIVE..... | 329 |
| ALGEBRĂ | 329 |
| ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ..... | 330 |
| Limite de șiruri | 330 |
| Limite de funcții | 333 |
| Continuitate | 336 |
| Derivabilitate | 339 |
| Reprezentarea grafică a funcțiilor..... | 344 |
| SOLUȚII..... | 348 |
| BIBLIOGRAFIE | 363 |

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Capitolul 1 PERMUTĂRI

1.1. Permutări

Definiție. Fie A mulțime nevidă finită. Orice funcție bijectivă $f: A \rightarrow A$ se numește *permutare* a mulțimii A .

Teoremă. Fie A mulțime finită cu n elemente ($n \in \mathbb{N}^*$). Atunci mulțimea $\{f: A \rightarrow A \mid f \text{ bijectivă}\}$ are $n!$ elemente.

Denumirea de permutare vine din limba latină: „permutare” – a muta unul față de altul, formula pentru P_n (numărul permutărilor de n elemente, $P_n = n!$) a fost dată de L. Gherșonide în 1321, iar termenul a fost propus de André Tacquet (1612 – 1660).

Observații: 1. Dacă A este mulțime finită nevidă și $f: A \rightarrow A$, atunci avem:

$$f \text{ bijectivă} \Leftrightarrow f \text{ injectivă} \Leftrightarrow f \text{ surjectivă.}$$

2. Deoarece compunerea a două funcții bijective este tot o funcție bijectivă, putem considera $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Orice funcție bijectivă $\sigma: A \rightarrow A$ se numește permutare (substituție) de n elemente (de gradul n).

Notații: $S_n = \{\sigma: A \rightarrow A \mid \sigma \text{ bijectivă}\}$. Avem $\text{card } S_n = n!$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Permutările vor fi notate cu literele grecești $\sigma, \varphi, \theta, \pi, \tau$ etc.

Observație: $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\} = A$.

Funcția identică $1_A: A \rightarrow A$ este permutare, numită permutarea identică și o notăm cu e . Avem $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Exemplu. S_3 are $3! = 6$ elemente. Avem:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dacă $\sigma, \tau \in S_n$, atunci $\sigma \circ \tau$ (notată și $\sigma\tau$) este tot permutare de gradul n numită compunerea (sau produsul) permutărilor σ și τ (în această ordine).

Respect pentru σ în S_n și τ în S_n
 Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$, atunci avem:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}.$$

Notație: $\sigma^2 = \sigma\sigma$, $\sigma^3 = \sigma^2\sigma$, $\sigma^4 = \sigma^3\sigma$, ..., $\sigma^n = \sigma^{n-1}\sigma$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu: Dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, atunci avem:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observăm că în general înmulțirea (produsul) nu este comutativă (comutativ). Nu se poate efectua decât produsul a două permutări de același grad.

Proprietățile compunerii permutărilor

- Compunerea permutărilor este asociativă: $(\sigma \circ \tau) \circ \theta = \sigma \circ (\tau \circ \theta)$, $\forall \sigma, \tau, \theta \in S_n$.
- Permutarea identică de gradul n este element neutru pentru compunerea permutărilor (din S_n): $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\forall \sigma \in S_n$.
- Orice permutare are o inversă: $\forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n$, astfel încât $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

Exemple: a) $e^{-1} = e$; b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Avem $\sigma^{-m} = (\sigma^{-1})^m$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Definiție. Fie $i, j \in A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $i \neq j$. Funcția $\tau_{ij} : A \rightarrow A$ (nota-

tă și (ij)) definită prin $\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j, & k = i \\ i, & k = j \\ k, & k \neq i, k \neq j \end{cases}$ se numește *transpoziție*. Avem deci

$$\tau_{ij} = (ij) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Proprietățile transpozițiilor

1. $(ij) = (ji)$ 2. $(ij)^{-1} = (ij)$ 3. $(ij)^2 = e$

4. Numărul tuturor transpozițiilor de gradul n este $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $n \geq 2$.

Exemple: 1. Transpozițiile de gradul 3 sunt (1 2), (1 3), (2 3).

2. Transpozițiile de gradul 4 sunt (1 2), (1 3), (1 4), (2 3), (2 4), (3 4).

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați mulțimea $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

$$\text{Soluție. } \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^3 = \sigma^2 \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\sigma^4 = \sigma^3 \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

Prin inducție se demonstrează că $\sigma^{4k+r} = \sigma^r$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Deci $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$.

2. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p = e$.

Soluție. Dacă $n = 1$ avem $S_1 = \{e\}$ și luăm $p = 1$. Dacă $n = 2$, luăm $p = 1$ dacă $\sigma = e$ și $p = 2$ dacă $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $n \geq 3$ și $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq e$ (dacă $\sigma = e$ luăm $p = 1$). Atunci

$\sigma^m \in S_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$. Deoarece mulțimea S_n este finită (are $n!$ elemente), rezultă că există $m, t \in \mathbb{N}^*$, $m < t$ astfel încât $\sigma^m = \sigma^t$. Atunci $\sigma^{t-m} = \sigma^t \cdot (\sigma^{-1})^m = e$. Luăm deci $p = t - m$.

3. Determinați permutările $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, știind că numerele $1 + \sigma(1)$, $2 + \sigma(2)$, $3 + \sigma(3)$, ..., $n + \sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

Soluție. Pentru orice $k = \overline{2, n-1}$ avem $(k - 1 + \sigma(k - 1)) + (k + 1 + \sigma(k + 1)) = 2(k + \sigma(k))$ și deci $\sigma(k - 1) + \sigma(k + 1) = 2\sigma(k)$. Deci numerele $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

Dacă rația este pozitivă, atunci $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n)$ și atunci $\sigma(n) = n$. Într-adevăr, dacă $\sigma(n) \neq n$, există k , $1 \leq k < n$ astfel încât $\sigma(n) = k$ și există t , $1 \leq t < n$, astfel încât $\sigma(t) = n$. Atunci $\sigma(n) < \sigma(t)$, unde $t < n$ (contradicție). Analog se arată că $\sigma(i) = i$, $1 \leq i < n - 1$ și deci $\sigma = e$.

Dacă progresia este descrescătoare, adică $\sigma(1) > \sigma(2) > \dots > \sigma(n)$, avem $\sigma(1) = n$, $\sigma(2) = n - 1$, ..., $\sigma(n) = 1$ și deci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

b) Determinați $m, n \in \mathbb{N}^*$ minime pentru care $\sigma^m = \tau^n = e$.

2. Determinați toate transpozițiile de gradul 5.

3. Rezolvați în S_4 ecuațiile:

a) $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Determinați permutările $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, știind că numerele $1 + \sigma(1), 2 + \sigma(2), \dots, n + \sigma(n)$ formează o progresie geometrică.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Determinați $\sigma \in S_n$ în cazurile:

a) $1 + \sigma(1) = 2 + \sigma(2) = \dots = n + \sigma(n)$;

b) $\sigma(1) - 1 = \sigma(2) - 2 = \dots = \sigma(n) - n$;

c) $\sigma(1) \cdot 1 - \sigma(2) \cdot 2 = \dots = n\sigma(n)$.

6. Rezolvați în S_5 ecuațiile:

a) $\sigma^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, unde $n \in \{3, 4, 5\}$;

b) $\sigma\tau = \tau\sigma$, unde $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Fie numerele reale strict pozitive $a_1 < a_2 < a_3$. Determinați (în fiecare caz) permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care:

a) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 a_i a_{\sigma(i)}$ este maximă, respectiv minimă;

b) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$ este maximă, respectiv minimă.

c) suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 (a_i - a_{\sigma(i)})^2$ este maximă, respectiv minimă.

8. Determinați σ^{100} , σ^{201} , σ^{302} , unde:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Determinați σ pentru care:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

10. Fie $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = 4123$. Determinați suma $\sum_{\sigma \in S_4} \overline{a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)} a_{\sigma(4)}}$.

11. Se consideră numerele $x = 4675$, $y = 24365$.

a) Câte numere distincte se obțin permutând cifrele numerelor x și y ?

b) Al câtelea număr este în ordine crescătoare (respectiv descrescătoare) fiecare din numerele x și y când se efectuează toate permutările posibile ale cifrelor celor două numere?

12. Se consideră numerele $x = 4225$ și $y = 43556$.

a) Câte numere distincte se obțin permutând toate cifrele numerelor x și y ?

b) Calculați în fiecare caz în parte suma tuturor numerelor obținute.

13. Se consideră numerele $0 < x_1 < x_2 < x_3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care suma:

a) $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este maximă;

b) $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

c) $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este maximă;

d) $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{x_i x_{\sigma(i)}}$ este minimă;

e) $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{\sigma(i)})^3$ este maximă;

b) $S_\sigma = \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{\sigma(i)})^3$ este minimă.

14. Se consideră numerele $0 < x_1 < x_2 < x_3$. Determinați permutarea $\sigma \in S_3$ pentru care avem $x_1 x_{\sigma(1)} < x_2 x_{\sigma(2)} < x_3 x_{\sigma(3)}$.

15. Demonstrați că pentru orice permutare $\sigma \in S_3$ avem $\sum_{i=1}^3 \frac{\sigma(i)}{i^2} \geq \frac{11}{6}$.

16. Fie numerele x_1, x_2, x_3 din intervalul $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_3$

avem: $\left(x_1 + \frac{1}{x_{\sigma(1)}}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_{\sigma(2)}}\right) \left(x_3 + \frac{1}{x_{\sigma(3)}}\right) < \frac{125}{8}$.

17. Fie $H \subset S_n$, $H \neq \emptyset$, cu proprietatea că oricare ar fi $\sigma, \theta \in \mathbb{N}$, avem $\sigma\theta \in H$. Demonstrați că:

a) $e \in H$;

b) dacă $\sigma \in H$, atunci $\sigma^{-1} \in H$.

libris

1.2. Inversiunile unei permutări

Respect pentru oameni și cărți

Definiție. Se numește *inversiune* a permutării $\sigma \in S_n, n \geq 2$, o pereche (ij) cu proprietățile $1 \leq i < j \leq n$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Observații.

1. Perechea (i, j) este inversiune a permutării $\sigma \Leftrightarrow \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} < 0$.

2. Numărul inversiunilor permutării σ se notează cu $\text{Inv}(\sigma)$ (sau cu $m(\sigma)$). Avem atunci $m(e) = 0$ și $m(\sigma) \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $\sigma \neq e$.

3. Numărul maxim de inversiuni este $\frac{n(n-1)}{2}$ și se obține pentru permutarea:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ adică pentru permutarea } \sigma \text{ definită prin:}$$

$$\sigma(k) = n - k + 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

Definiție. Permutarea σ se numește *permutare pară (impară)* dacă $m(\sigma)$ este număr par (respectiv impar).

Definiție. Numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește *signatura* permutării σ .

Observații:

1. Pentru orice $\sigma \in S_n$ avem $\varepsilon(\sigma) = 1$ sau $\varepsilon(\sigma) = -1$.

2. Permutarea σ este permutare pară $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = 1$.

Permutarea σ este permutare impară $\Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$.

Teoremă. Orice transpoziție este permutare impară.

Demonstrație. Fie transpoziția (ij) cu $1 \leq i < j \leq n$. Dacă $k < i$ avem $\tau_{ij}(k) = k < j = \tau_{ij}(i)$ și deci (k, i) nu este inversiune. Analog perechea (j, k) cu $j < k$ nu este inversiune. Fie $i < k < j$. Deoarece $\tau_{ij}(i) = j > k = \tau_{ij}(k)$, rezultă că perechile (i, j) și (k, j) sunt inversiuni. Deoarece și (i, j) este inversiune, rezultă că $m(\tau_{ij}) = 2(j - i - 1) + 1 = 2(j - i) - 1$ și atunci $m(\tau_{ij}) = -1$.

Teoremă. Dacă $\sigma \in S_n$, atunci $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

Demonstrație. Produsul definit în teoremă conține C_n^2 factori. Fie factorul $\frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$, unde $1 \leq i < j \leq n$. Fie $\sigma(i) = k, \sigma(j) = p$. Avem evident $k \neq p$ și atunci

$\sigma(i) - \sigma(j) = k - p \neq 0$. Numărul $k - p$ apare în factorul $\frac{\sigma(k) - \sigma(p)}{k - p}$ dacă $k < p$ sau în

factorul $\frac{\sigma(p) - \sigma(k)}{p - k}$ dacă $p < k$, după cum (i, j) este inversiune sau nu este inversiune.

Prin simplificare obținem -1 de un număr de ori egal cu numărul de inversiuni ale permutării σ . Deci produsul este $\varepsilon(\sigma)$.

Teoremă. Pentru orice $\sigma, \tau \in S_n$ avem $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ (signatura produsului a două permutări este egală cu produsul signaturilor celor două permutări).

Demonstrație.
$$\varepsilon(\sigma\tau) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \cdot \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right) =$$

$$= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \right) \cdot \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau).$$

Consecință. Fie $\varepsilon, \tau \in S_n$. Atunci avem:

- a) $\sigma\tau$ este permutare pară $\Leftrightarrow \sigma$ și τ sunt ambele pare sau ambele impare;
- b) $\sigma\tau$ este permutare impară $\Leftrightarrow \sigma$ și τ sunt de parități diferite.

Teoremă. Orice permutare din $S_n, n \geq 2$, este un produs de transpoziții.

Consecință. Orice permutare pară (respectiv impară) este produsul unui număr par (respectiv impar) de transpoziții.

Observație. Numărul permutărilor pare, respectiv impare, din $S_n, n \geq 2$, este $\frac{n!}{2}$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Determinați signatura permutării $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție. În cele ce urmează se consideră numerele de pe linia a doua. Înaintea numărului 1 se află numerele 4 și 3. Avem deci două inversiuni: (1, 3) și (2, 3) (s-au luat numerele corespunzătoare de pe prima linie). Tăind numărul de pe linia a doua, mai rămân numerele 4, 3, 5, 2. Luând numărul 2, înaintea lui se află numerele 4, 3, 5. Avem deci inversiunile (1, 5), (2, 5), (4, 5). Analog se determină inversiunea (1, 2). Rezultă că $m(\varepsilon) = 6, \varepsilon(\sigma) = 1$.

2. Rezolvați ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție. Fie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Deoarece $m(\tau) = 7$, rezultă că τ este permutare impară. Deoarece σ^2 este permutare pară ($\varepsilon(\sigma^2) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma) = 1$), rezultă că ecuația $\sigma^2 = \tau$ nu are soluție.

3. Scrieți permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ca produs de transpoziții.

Soluție. Considerăm transpoziția (1 5) = τ_1 . Fie $\sigma_1 = \tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Consi-

derăm transpoziția $(1\ 4) = \tau_2$. Fie $\sigma_2 = \tau_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Considerăm transpoziția $(1\ 2) = \tau_3$. Fie $\sigma_3 = \tau_3\sigma_2 = e$. Rezultă că $\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = e$ și deci $\sigma = \tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1} = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 2)$.

4. Fie $\sigma \in S_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

a) Determinați numărul inversiunilor permutării σ .

b) Determinați n , știind că σ este permutare pară.

Soluție. a) Numerele $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ sunt scrise în ordine crescătoare (pe a doua linie). În fața numerelor $2, 4, 6, \dots, 2n-2$ sunt scrise $n-1, n-2, n-3, \dots$, respectiv

1 număr mai mare. Deci $m(\sigma) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

b) Avem $m(\sigma)$ număr par $\Leftrightarrow n = 4k, k \in \mathbb{N}^*$ sau $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinați signatura permutărilor:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & i & 1 & 6 & j & 5 \end{pmatrix}$.

2. Scrieți ca produs de transpoziții următoarele permutări:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Rezolvați ecuația $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Determinați permutările $\sigma \in S_n$ pentru care $m(\sigma) = 3$.

5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ număr impar. Demonstrați că pentru orice $\sigma \in S_n$ există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $k + \sigma(k)$ să fie număr par.

6. Fie $\sigma \in S_{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $m(\sigma)$.

b) Determinați n , știind că σ este permutare impară.

7. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $\sigma \in S_{2n}$ este permutare pară:

$$a) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \dots & 1 & 2n & 2n-2 & \dots & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$b) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \dots & 2 & 2n-1 & 2n-3 & \dots & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n-1 & 2n & 2n-3 & 2n-2 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Determinați numărul de inversiuni ale permutării $\sigma \in S_{3n}$:

$$a) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \dots & 3n-1 & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 1 & 4 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & \dots & 3n-4 & 3n-1 \end{pmatrix};$$

$$b) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n & 2n+1 & \dots & 3n-1 & 3n \\ 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & \dots & 3n-1 & 3 & 6 & \dots & 3n-3 & 3n \end{pmatrix}.$$

9. Știind că permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$ are m inversiuni, determinați

numărul de inversiuni ale permutării $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$.

10. Rezolvați ecuațiile:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \circ \sigma \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

11. Fie permutarea $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Demonstrați că:

a) există $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$, astfel încât $\sigma^k = e$;

b) dacă există $m, p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^m = \sigma^p$, atunci $\sigma^{(m,p)} = e$;

c) dacă m este cel mai mic număr din \mathbb{N}^* cu proprietatea $\sigma^m = e$, atunci pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\sigma^p = e$ avem $m \mid p$.

12. Determinați permutarea $\sigma \in S_n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, pentru care numerele $1 + \sigma(1)$, $2 + \sigma(2)$, \dots , $n + \sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

13. Determinați permutarea $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, pentru care $|\sigma(1) - 1| = |\sigma(2) - 2| = \dots = |\sigma(n) - n|$.

14. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\sigma \in S_n$. Demonstrați că dacă $\sigma\tau = \tau\sigma$ pentru orice $\tau \in S_n$, atunci $\sigma = e$.

15. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Fie $\sigma, \tau \in S_n$ având proprietățile:

i) dacă există $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ astfel încât $\sigma(k) \neq k$, atunci $\tau(k) = k$;